Röðun með tæmingarstafla

Anders Claesson
Bjarki Ágúst Guðmundsson

Umraðanir

- *Umröðun* af lengd n: umröðun af $\{1, 2, \ldots, n\}$
  - 1234
  - 1324
  - 4321
- *Hækkandi umröðunin*: $12\ldots n$
  - 123456

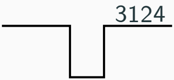
Staflar

- *Stafli*: „síðast inn, fyrst út“ gagnaskipan með tveimur aðgerðum:
    - *Hlaða*: Setja stak efst á staflann
    - *Afhlaða*: Taka efsta stakið af staflanum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

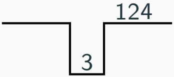
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

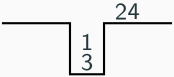
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

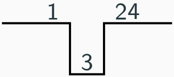
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

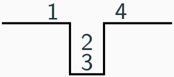
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

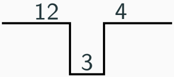
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

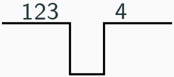
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

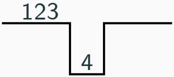
Hverju mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

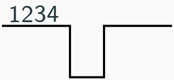
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

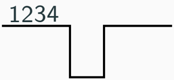
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

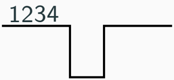


- 3124 er *raðanleg með stafla*

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

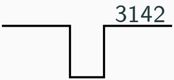


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
    - Höldum staflanum í hækkandi röð
    - Hlöðum þegar við getum
    - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

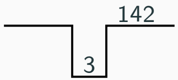


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

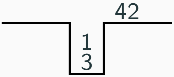


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

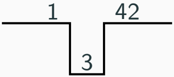


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

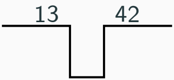


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

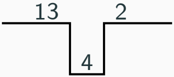


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

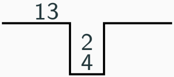


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

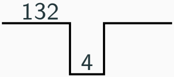


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

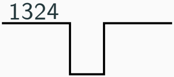


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hverju mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

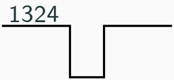


- 3124 er *raðanleg með stafla*
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?

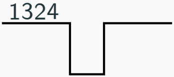


- 3124 er *raðanleg með stafla*, en 3142 ekki
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum

Röðun með stafla

Dæmi (Knuth, 1968)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með einni umferð í gegnum stafla?



- 3124 er *raðanleg með stafla*, en 3142 ekki
- Gráðugt reiknirit
  - Höldum staflanum í hækkandi röð
  - Hlöðum þegar við getum
  - Afhlöðum þegar við þurfum
- Umraðanir raðanlegar með stafla:
  - Einföld lýsing með umraðanamynstrum
  - Taldar af Catalan tölunum C_n

Röðun með stafla, margar umferðir

Dæmi (West, 1990)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með **í mesta lagi tveimur umferðum** í gegnum stafla?

Röðun með stafla, margar umferðir

Dæmi (West, 1990)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með **í mesta lagi tveimur umferðum** í gegnum stafla?

- Skoðum 3142
  - Eftir eina umferð: 1324
  - Eftir tvær umferðir: 1234
  - 3142 er *tvíraðanleg með stafla*

Röðun með stafla, margar umferðir

Dæmi (West, 1990)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með **í mesta lagi tveimur umferðum** í gegnum stafla?

- Skoðum 3142
  - Eftir eina umferð: 1324
  - Eftir tvær umferðir: 1234
  - 3142 er *tvíraðanleg með stafla*
- Umraðanir tvíraðanlegar með stafla:
  - Nokkuð einföld lýsing með umraðanamynstrum
  - Jafna fyrir talningu þeirra sönnuð af (Zeilberger, 1992)

Röðun með stafla, margar umferðir

Dæmi (West, 1990)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með **í mesta lagi tveimur umferðum** í gegnum stafla?

- Skoðum 3142
  - Eftir eina umferð: 1324
  - Eftir tvær umferðir: 1234
  - 3142 er *tvíraðanleg með stafla*
- Umraðanir tvíraðanlegar með stafla:
  - Nokkuð einföld lýsing með umraðanamynstrum
  - Jafna fyrir talningu þeirra sönnuð af (Zeilberger, 1992)
- Umraðanir þríraðanlegar með stafla:
  - Flókin lýsing með umraðanamynstrum (Úlfarsson, 2011)
  - Talning ekki þekkt

Röðun með stafla, margar umferðir

Dæmi (West, 1990)

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með **í mesta lagi tveimur umferðum** í gegnum stafla?

- Skoðum 3142
  - Eftir eina umferð: 1324
  - Eftir tvær umferðir: 1234
  - 3142 er *tvíraðanleg með stafla*
- Umraðanir tvíraðanlegar með stafla:
  - Nokkuð einföld lýsing með umraðanamynstrum
  - Jafna fyrir talningu þeirra sönnuð af (Zeilberger, 1992)
- Umraðanir þríraðanlegar með stafla:
  - Flókin lýsing með umraðanamynstrum (Úlfarsson, 2011)
  - Talning ekki þekkt
- Umraðanir k-raðanlegar með stafla, $k > 3$:
  - Ekkert þekkt

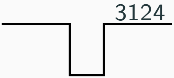
Tæmingarstaflar

- *Tæmingarstafli*: „síðast inn, fyrst út“ gagnaskipan með tveimur aðgerðum:
  - *Hlaða*: Setja stak efst á tæmingarstaflann
  - *Tæma*: Taka öll stökin af tæmingarstaflanum

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

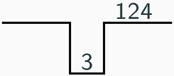
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

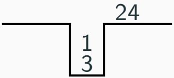
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

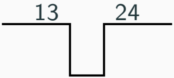
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

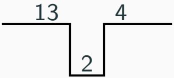
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

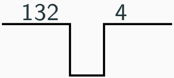
Hverju mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

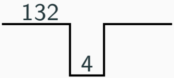
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

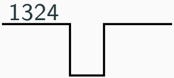
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

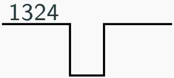
Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

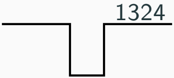


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

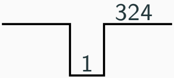


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

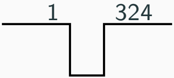


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

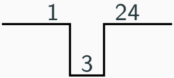


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

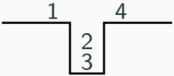


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

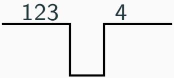


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

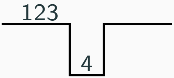


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

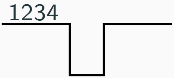


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

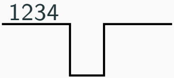


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

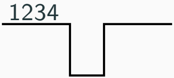


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla, en er tvíraðanleg

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

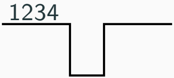


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla, en er tvíraðanleg
- Umraðanir raðanlegar með tæmingarstafla:
    - Einföld lýsing, og 2^{n-1} raðanlegar umraðanir af lengd n (Avis og Newborn, 1981)

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?

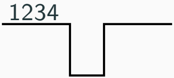


- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla, en er tvíraðanleg
- Umraðanir raðanlegar með tæmingarstafla:
  - Einföld lýsing, og 2^{n-1} raðanlegar umraðanir af lengd n (Avis og Newborn, 1981)
- Umraðanir tvíraðanlegar með tæmingarstafla:
  - Flókin lýsing með umraðanamynstrum, og jafna er þekkt (Pudwell og Smith, 2017)

Röðun með tæmingarstafla

Dæmi

Hversu mörgum umröðunum af lengd n er hægt að raða með í mesta lagi k umferðum í gegnum tæmingarstafla?



- 3124 er ekki raðanleg með tæmingarstafla, en er tvíraðanleg
- Umraðanir raðanlegar með tæmingarstafla:
  - Einföld lýsing, og 2^{n-1} raðanlegar umraðanir af lengd n (Avis og Newborn, 1981)
- Umraðanir tvíraðanlegar með tæmingarstafla:
  - Flókin lýsing með umraðanamynstrum, og jafna er þekkt (Pudwell og Smith, 2017)
- Umraðanir k-raðanlegar með tæmingarstafla, $k > 2$:
  - Opið vandamál—reynum að telja þær!

Röðunarrit

$$5 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 6 \quad 3 \quad 9$$

Röðunarrit

$\boxed{5}$ 1 2 4 7 8 6 3 9

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9

Röðunarrit

$$\boxed{5 \quad 1} \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 6 \quad 3 \quad 9$$

$$1 \quad 5$$

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5							

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2						

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2						

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4					

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4					

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7				

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7				

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7				

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7				

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9

1 5 2 4 7 3 6 8

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1								

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1								

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1								

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5						

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5						

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4					

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4					

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4					

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7			

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7			

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6		

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6		

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1								

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1								

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2							

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2							

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2							

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2							

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5				

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5				

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5				

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5	6	7		

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5	6	7		

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	

Röðunarrit

5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	

Röðunarrit

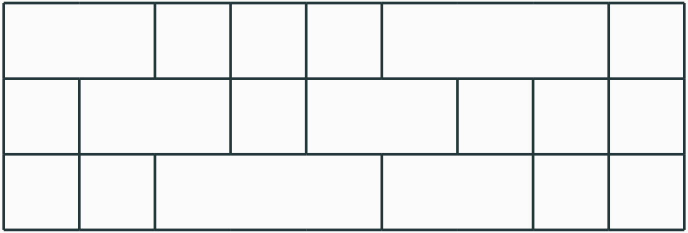
5	1	2	4	7	8	6	3	9
1	5	2	4	7	3	6	8	9
1	2	5	4	3	7	6	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Röðunarrit

<table>
<tr><td colspan="2">5 1</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td colspan="3">8 6 3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">5 2</td><td>4</td><td colspan="2">7 3</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td colspan="3">5 4 3</td><td colspan="2">7 6</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
</table>

- Við köllum þetta *röðunarrit* af lengd 9 og stigi 3
  - Tölurnar í hverjum *reit* verða að vera í lækkandi röð
  - Samliggjandi tölur aðskildar með *striki* þurfa að vera í hækkandi röð
  - Hver umröðun er „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan
  - Síðasta umröðunin þarf að vera hækkandi umröðunin

Röðunarrit



- Við köllum þetta *röðunarrit* af lengd 9 og stigi 3
    - Tölurnar í hverjum *reit* verða að vera í lækkandi röð
    - Samliggjandi tölur aðskildar með *striki* þurfa að vera í hækkandi röð
    - Hver umröðun er „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan
    - Síðasta umröðunin þarf að vera hækkandi umröðunin
- Fjarlægjum tölurnar og fáum þá *beinagrind* röðunarritsins
    - Röðunarrit af lengd n og stigi k hefur beinagrind með k röðum
    - Hver röð er runa af reitum sem hafa samtals stærð n

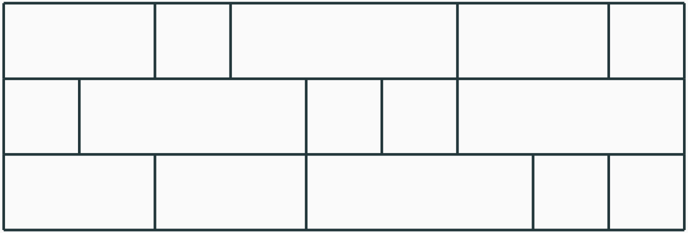
Gildar beinagrindur

- Segjum að við séum með umröðun af lengd n sem er k-raðanlega með tæmingarstafla. Við getum
  1. framleitt röðunarrit hennar, og
  2. fjarlægt tölurnar úr ritinu.

  Þetta gefur okkur beinagrind af lengd n og stigi k.
- Hvað með hina áttina?

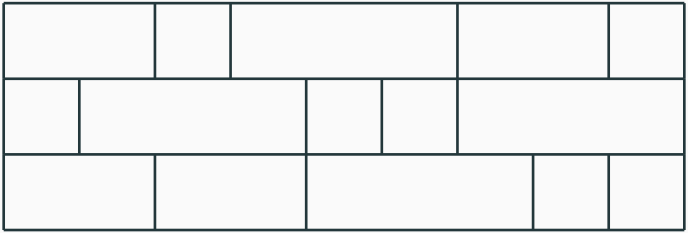
Gildar beinagrindur

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:



Gildar beinagrindur

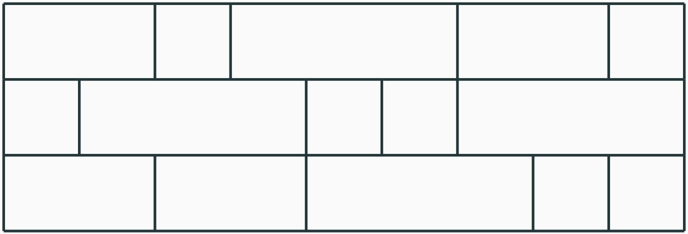
- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:



- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind.

Gildar beinagrindur

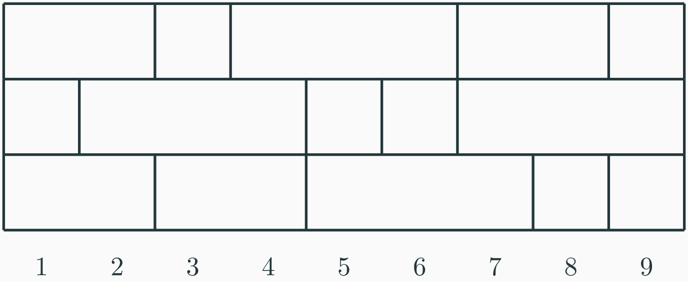
- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:



- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
    - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin

Gildar beinagrindur

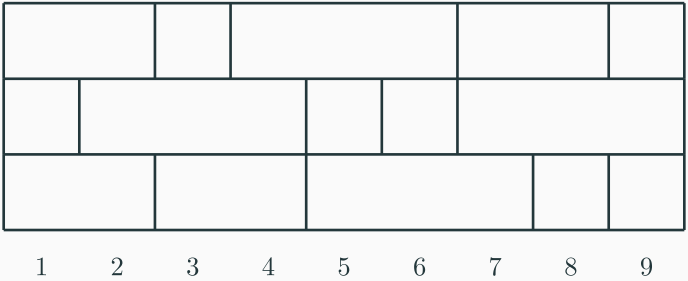
- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:



- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
  - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin

Gildar beinagrindur

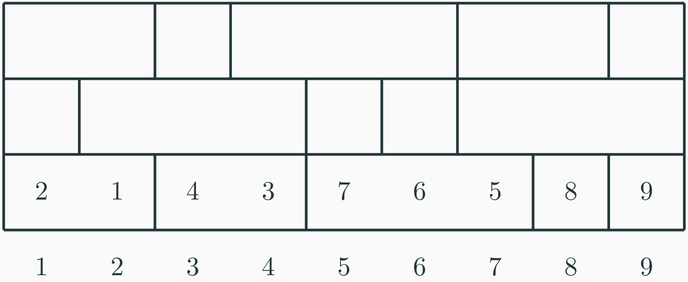
- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:



- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
    - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin, og
    - hver umröðun að vera „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan.

Gildar beinagrindur

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:



- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
  - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin, og
  - hver umröðun að vera „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan.

Gildar beinagrindur

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">3 4 1</td><td>7</td><td>6</td><td colspan="3">9 8 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 1</td><td colspan="2">4 3</td><td colspan="3">7 6 5</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
</table>

- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
  - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin, og
  - hver umröðun að vera „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan.

Gildar beinagrindur

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:

<table>
<tr><td colspan="2">3 2</td><td>4</td><td colspan="3">6 7 1</td><td colspan="2">8 9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">3 4 1</td><td>7</td><td>6</td><td colspan="3">9 8 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 1</td><td colspan="2">4 3</td><td colspan="3">7 6 5</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
</table>

- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
  - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin, og
  - hver umröðun að vera „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan.

Gildar beinagrindur

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:

3	2	4	6	7	1	8	9	5
2	3	4	1	7	6	9	8	5
2	1	4	3	7	6	5	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
  - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin, og
  - hver umröðun að vera „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan.

Gildar beinagrindur

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:

3	2	4	6	7	1	8	9	5
2	3	4	1	7	6	9	8	5
2	1	4	3	7	6	5	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
  - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin, og
  - hver umröðun að vera „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan.

Gildar beinagrindur

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af lengd 9 og stigi 3:

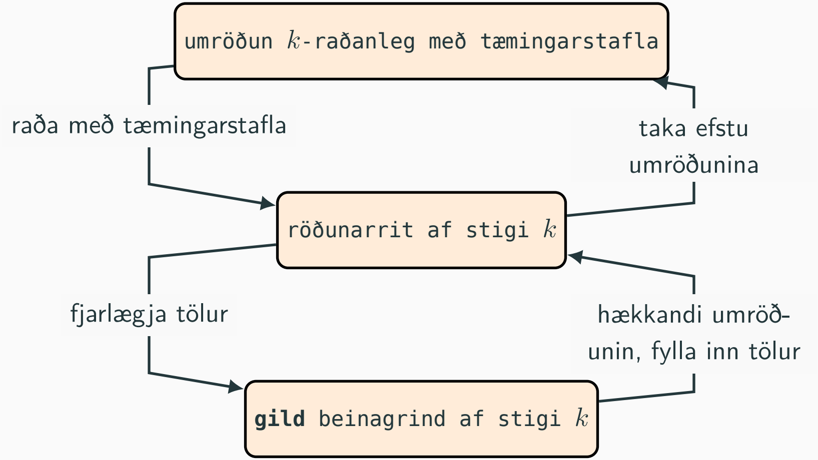
3	2	4	6	7	1	8	9	5
2	3	4	1	7	6	9	8	5
2	1	4	3	7	6	5	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Gerum ráð fyrir að það sé til röðunarrit með þessa beinagrind. Þá verður
  - síðasta umröðunin að vera hækkandi umröðunin, og
  - hver umröðun að vera „reita-speglun“ af umröðuninni að ofan.
- Þetta er ekki röðunarrit, svo við segjum að beinagrindin sé *ógild*!

Gildar beinagrindur

- Beinagrind er *gild* ef við fáum röðunarrit eftir að við fyllum inn tölurnar:
  (1) Tölurnar í hverjum reit eru í lækkandi röð
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki eru í hækkandi röð

Gagntæk vörpun



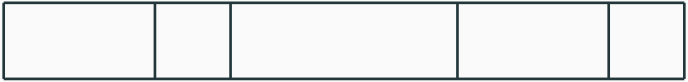
- Við höfum gagntæka vörpun á milli umraðana af lengd n sem eru k-raðanlegar með tæmingarstafla og gildra beinagrinda af lengd n og stigi k

Gildar beinagrindur

- Til að telja umraðanir af lengd n sem eru k-raðanlegar með tæmingarstafla þá munum við telja gildu beinagrindurnar af lengd n og stigi k
- Hvernig vitum við hvort gefin beinagrind sé gild?

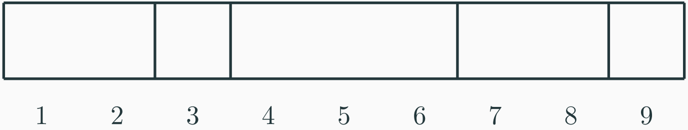
Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:



Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:



Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:

2	1	3	6	5	4	8	7	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:

2	1 |	3 |	6	5	4 |	8	7 |	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Munið skilyrðin tvö:
  (1) Tölurnar í hverjum reit þurfa að vera í lækkandi röð

  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki þurfa að vera í hækkandi röð

Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:

2	1	3	6	5	4	8	7	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Munið skilyrðin tvö:
  (1) Tölurnar í hverjum reit þurfa að vera í lækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki þurfa að vera í hækkandi röð

Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:

2 1	3	6 5 4	8 7	9

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

- Munið skilyrðin tvö:
  (1) Tölurnar í hverjum reit þurfa að vera í lækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki þurfa að vera í hækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!

Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:

2	1	3	6	5	4	8	7	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Munið skilyrðin tvö:
  1. Tölurnar í hverjum reit þurfa að vera í lækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
  2. Samliggjandi tölur aðskildar með striki þurfa að vera í hækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
- Allar beinagrindur af stigi 1 eru gildar!

Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:

2	1	3	6	5	4	8	7	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Munið skilyrðin tvö:
  (1) Tölurnar í hverjum reit þurfa að vera í lækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki þurfa að vera í hækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
- Allar beinagrindur af stigi 1 eru gildar!
- Það eru 2^{n-1} beinagrindur af lengd n og stigi 1

Gildar beinagrindur fyrir $k = 1$

- Skoðum eftirfarandi beinagrind af stigi 1:

2	1	3	6	5	4	8	7	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Munið skilyrðin tvö:
  (1) Tölurnar í hverjum reit þurfa að vera í lækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki þurfa að vera í hækkandi röð—þetta mun alltaf gilda!
- Allar beinagrindur af stigi 1 eru gildar!
- Það eru 2^{n-1} beinagrindur af lengd n og stigi 1
- Þar af leiðandi 2^{n-1} umraðanir af lengd n sem eru raðanlegar með tæmingarstafla

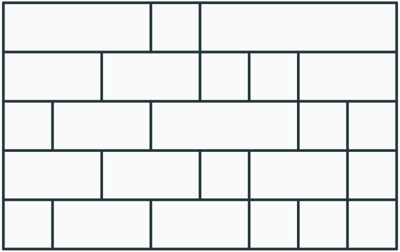
Gildar beinagrindur almennt

- Skoðum nú beinagrindur af einhverju stigi k
- Munið skilyrðin tvö til að ákvarða hvort beinagrind sé gild:
  (1) Tölurnar í hverjum reit eru í lækkandi röð
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki eru í hækkandi röð

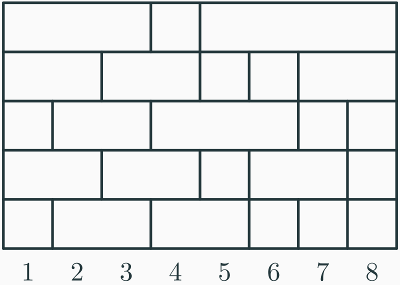
Gildar beinagrindur almennt

- Skoðum nú beinagrindur af einhverju stigi k
- Munið skilyrðin tvö til að ákvarða hvort beinagrind sé gild:
  (1) Tölurnar í hverjum reit eru í lækkandi röð
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki eru í hækkandi röð

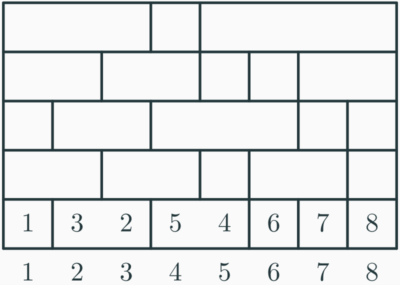
Reitir í lækkandi röð



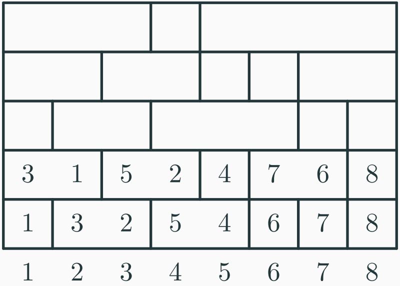
Reitir í lækkandi röð



Reitir í lækkandi röð



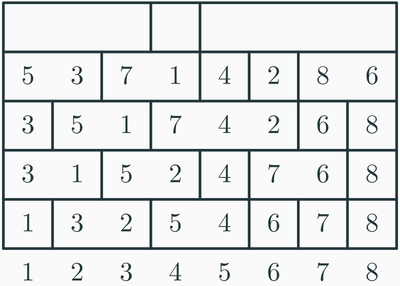
Reitir í lækkandi röð



Reitir í lækkandi röð

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="1"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">5 1</td><td colspan="3">7 4 2</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 1</td><td colspan="2">5 2</td><td>4</td><td colspan="2">7 6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">3 2</td><td colspan="2">5 4</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
</table>

Reitir í lækkandi röð



Reitir í lækkandi röð

7	3	5	1	6	8	2	4
5	3	7	1	4	2	8	6
3	5	1	7	4	2	6	8
3	1	5	2	4	7	6	8
1	3	2	5	4	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

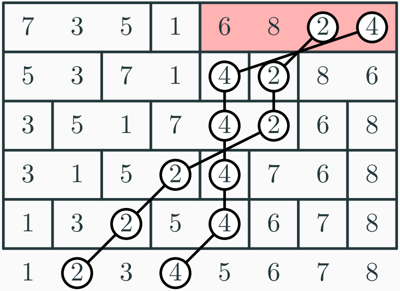
Reitir í lækkandi röð

7	3	5	1	6	8	2	4
5	3	7	1	4	2	8	6
3	5	1	7	4	2	6	8
3	1	5	2	4	7	6	8
1	3	2	5	4	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

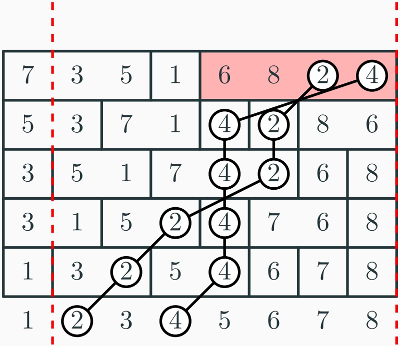
Reitir í lækkandi röð

7	3	5	1	6	8	2	4
5	3	7	1	4	2	8	6
3	5	1	7	4	2	6	8
3	1	5	2	4	7	6	8
1	3	2	5	4	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

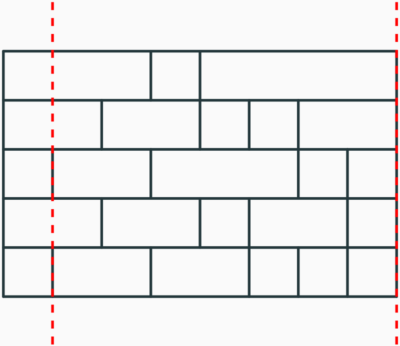
Reitir í lækkandi röð



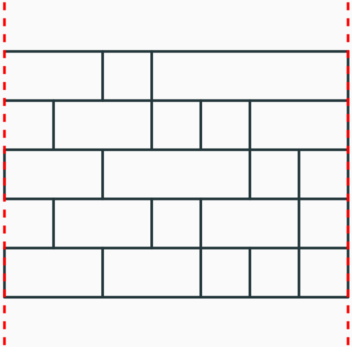
Reitir í lækkandi röð



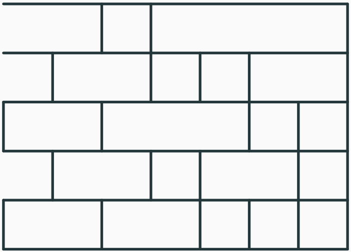
Reitir í lækkandi röð



Reitir í lækkandi röð

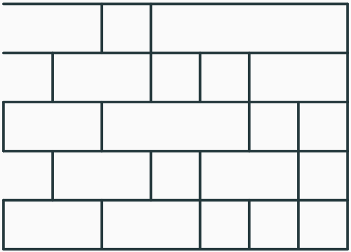


Reitir í lækkandi röð



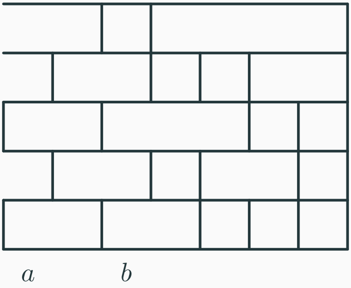
- Köllum þetta *vondan bút*

Reitir í lækkandi röð



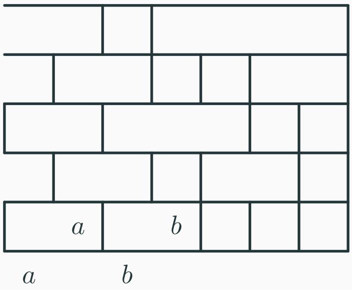
- Köllum þetta *vondan bút*
- Ef hann kemur fyrir í beinagrind af stigi 5, þá er hún ógild

Reitir í lækkandi röð



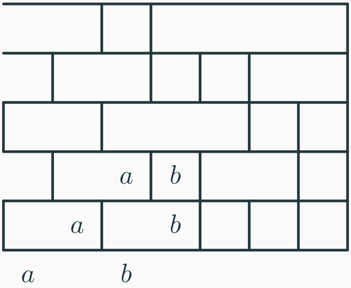
- Köllum þetta *vondan bút*
- Ef hann kemur fyrir í beinagrind af stigi 5, þá er hún ógild

Reitir í lækkandi röð



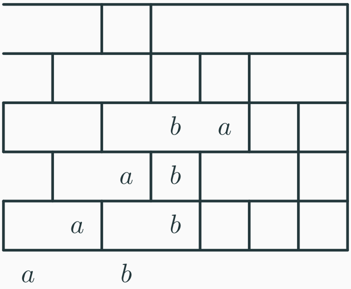
- Köllum þetta *vondan bút*
- Ef hann kemur fyrir í beinagrind af stigi 5, þá er hún ógild

Reitir í lækkandi röð



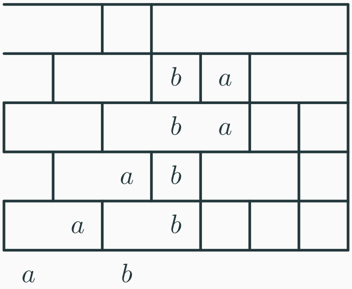
- Köllum þetta *vondan bút*
- Ef hann kemur fyrir í beinagrind af stigi 5, þá er hún ógild

Reitir í lækkandi röð



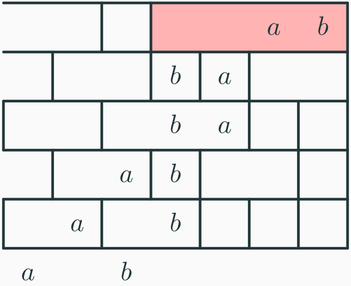
- Köllum þetta *vondan bút*
- Ef hann kemur fyrir í beinagrind af stigi 5, þá er hún ógild

Reitir í lækkandi röð



- Köllum þetta *vondan bút*
- Ef hann kemur fyrir í beinagrind af stigi 5, þá er hún ógild

Reitir í lækkandi röð



- Köllum þetta *vondan bút*
- Ef hann kemur fyrir í beinagrind af stigi 5, þá er hún ógild

Gildar beinagrindur almennt

- Munið skilyrðin tvö til að ákvarða hvort beinagrind sé gild:
  (1) Tölurnar í hverjum reit eru í lækkandi röð
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki eru í hækkandi röð

Gildar beinagrindur almennt

- Munið skilyrðin tvö til að ákvarða hvort beinagrind sé gild:
  1. Tölurnar í hverjum reit eru í lækkandi röð
  2. Samliggjandi tölur aðskildar með striki eru í hækkandi röð

Gildar beinagrindur almennt

- Munið skilyrðin tvö til að ákvarða hvort beinagrind sé gild:
  (1) Tölurnar í hverjum reit eru í lækkandi röð
  (2) Samliggjandi tölur aðskildar með striki eru í hækkandi röð
- Vondur bútur er eins konar vitni fyrir því að beinagrind sé ógild

Vondir bútar

Hjálparsetning

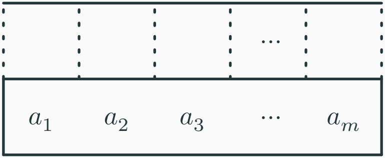
Beinagrind er gild þá og því aðeins að hún innihaldi engan vondan bút

Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

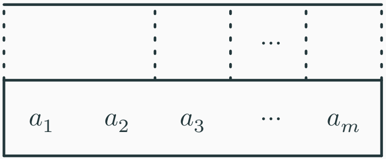
- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \ldots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$



Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$



Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$

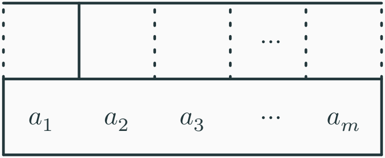
a_2	a_1		$\cdots$	
a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_m

Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$

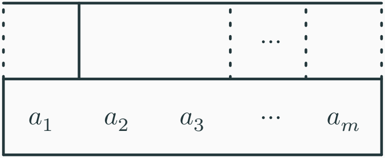


Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$

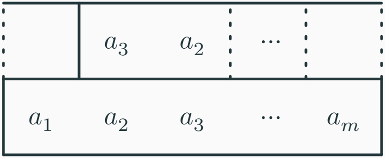


Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$

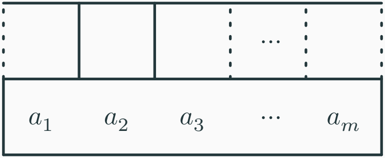


Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$

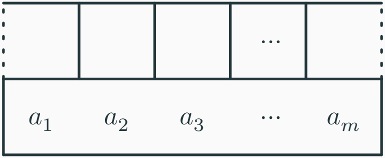


Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

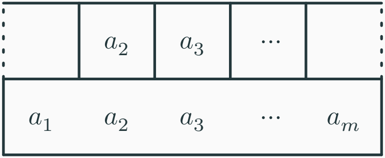
- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \ldots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$



Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$

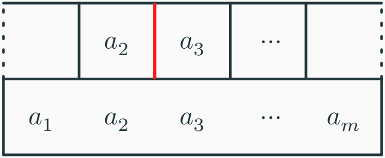


Stórir reitir

Hjálparsetning

Í gildu röðunarriti, af hvaða stigi sem er, þá geta bara reitir af stærð 4 eða meira komið fyrir á fyrstu röðinni

- Gerum ráð fyrir að það sé reitur, ekki á fyrstu röðinni, sem inniheldur tölurnar $a_1, \dots, a_m$, $m \geq 4$
- Gilt röðunarrit: $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$



Vondir bútar

Hjálparsetning

Beinagrind af stigi k er gild þá og því aðeins að hún hafi engan reit af stærð stærri en 3, nema á fyrstu röð, og að hún innihaldi engan vondan bút af stærð minni eða jafnt og $4k - 5$

Vondir bútar

Hjálparsetning

Beinagrind af stigi k er gild þá og því aðeins að hún hafi engan reit af stærð stærri en 3, nema á fyrstu röð, og að hún innihaldi engan vondan bút af stærð minni eða jafnt og $4k - 5$

- Ef k er fast, þá
  - eru bara endanlega margir vondir bútar sem þarf að athuga,

Vondir bútar

Hjálparsetning

Beinagrind af stigi k er gild þá og því aðeins að hún hafi engan reit af stærð stærri en 3, nema á fyrstu röð, og að hún innihaldi engan vondan bút af stærð minni eða jafnt og $4k - 5$

- Ef k er fast, þá
  - eru bara endanlega margir vondir bútar sem þarf að athuga,
  - og þessa vondu búta er hægt að finna: $\mathscr{F}_k$

Vondir bútar

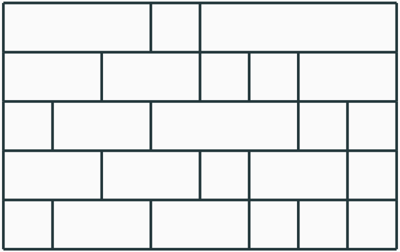
- Beinagrind af stigi k er gild þá og því aðeins að hún hafi engan reit af stærð stærri en 3, nema á fyrstu röð, og hún innihaldi engan bút úr $\mathcal{F}_k$
- Getum við notað þessa lýsingu til að telja fjölda gildra beinagrinda af stigi k?

Vondir bútar

- Beinagrind af stigi k er gild þá og því aðeins að hún hafi engan reit af stærð stærri en 3, nema á fyrstu röð, og hún innihaldi engan bút úr $\mathcal{F}_k$
- Getum við notað þessa lýsingu til að telja fjölda gildra beinagrinda af stigi k?
- Já, með því að nýta okkur fræði um formleg mál

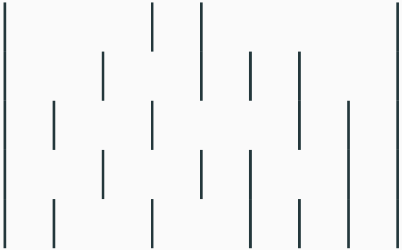
Formlegt mál

- Skulum setja fram beinagrindur sem formlegt mál



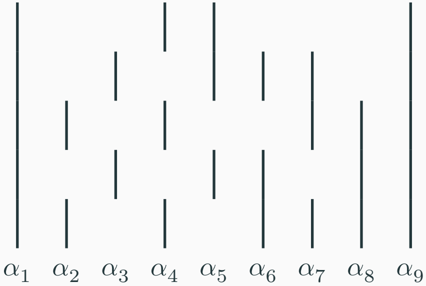
Formlegt mál

- Skulum setja fram beinagrindur sem formlegt mál



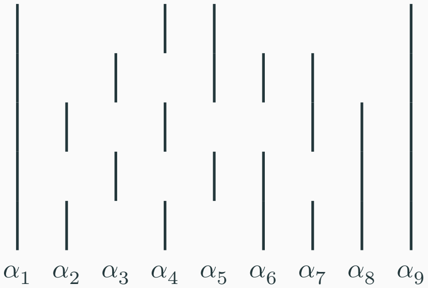
Formlegt mál

- Skulum setja fram beinagrindur sem formlegt mál



Formlegt mál

- Skulum setja fram beinagrindur sem formlegt mál



- Σ samanstendur af öllum 2^k mögulegum dálkum
- S er málið sem samanstendur af beinagrindum sem uppfylla:
    - Fyrsti og síðasti dálkurinn eru fylltir
    - Enginn reitur hefur stærð stærri en 3, nema í fyrstu röðinni
- Við getum sett upp löggenga endanlega stöðuvél (LES) sem samþykkir S, svo það er reglulegt mál

Að forðast vonda búta

- Við viljum mengi þeirra beinagrinda sem forðast alla bútana í $\mathcal{F}_k$
- Fyrir ákveðinn bút $F \in \mathcal{F}_k$ getum við búið til LES sem samþykkir þær beinagrindur sem innihalda F: T_F
- $\overline{T_F}$ samþykkir beinagrindur sem forðast F
- LES sem samþykkir gildu beinagrindurnar:

$$S \cap \bigcap_{F \in \mathcal{F}_k} \overline{T_F}$$

Framleiðnifall úr LES

- Viljum telja fjölda strengja sem stöðuvélin samþykkir
- Línulegt jöfnuhneppi gefur okkur framleiðnifallið
  - samþykktir strengir af lengd $n+1$
  - gildar beinagrindur af lengd n
  - umraðanir af lengd n sem eru k-raðanlegar með tæmingarstafla

Rætt framleiðnifall

- Framleiðnifallið fyrir mengi strengja sem eru samþykktir af LES er rætt: $P(x)/Q(x)$

Setning

Fyrir sérhvert k er framleiðnifallið fyrir umraðanir sem eru k-raðanlegar með tæmingarstafla rætt

Framleiðniföllin

k	Framleiðnifall
1	$(x-1)/(2x-1)$
2	$(x^3+x^2+x-1)/(2x^3+x^2+2x-1)$
3	$(2x^{10}+4x^9+2x^8+5x^7+11x^6+8x^5+6x^4+6x^3+2x^2+x-1)/(4x^{10}+8x^9+4x^8+10x^7+22x^6+16x^5+8x^4+6x^3+2x^2+2x-1)$
4	$(64x^{25}+448x^{24}+1184x^{23}+1784x^{22}+2028x^{21}+1948x^{20}+1080x^{19}+104x^{18}-180x^{17}+540x^{16}+1156x^{15}+696x^{14}+252x^{13}+238x^{12}+188x^{11}+502x^{10}+806x^9+544x^8+263x^7+185x^6+99x^5+33x^4+13x^3+3x^2+x-1)/(128x^{25}+896x^{24}+2368x^{23}+3568x^{22}+3928x^{21}+3064x^{20}+176x^{19}-2304x^{18}-2664x^{17}-1580x^{16}-352x^{15}-576x^{14}-1104x^{13}-760x^{12}-138x^{11}+686x^{10}+1238x^9+869x^8+382x^7+210x^6+102x^5+27x^4+12x^3+3x^2+2x-1)$

Takk fyrir!

https://arxiv.org/abs/1710.04978